Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, 05.07.2013. (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

1. (40%)(a) U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ i $\measuredangle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih.

(60%)(b) U prostoru su date tačke A i B i prava ℓ. Odrediti ravan α takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravan α pripada pravoj ℓ.

Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.

2. (40%)(a) Konstruisati kvadrat $\square ABCD$ takav da date tačke P, Q, R i S pripadaju redom stranicama AB, BC, CD i DA.

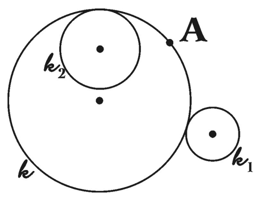
Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Presječna tačka simetrale ivice BC i simetrale unutrašnjeg ugla $\measuredangle BAC$ trougla $\triangle ABC$ pripada opisanom krugu oko tog trougla.

(60%)(b) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c centri spolja upisanih krugova.

3. (20%)(a) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

(20%)(b) Dat je trougao $\triangle ABC$. Neka je D presječna tačka simetrale s ugla $\measuredangle ABC$ i kruga k opisanog oko trougla $\triangle ABC$. Dokazati da D pripada simetrali stranice AC.

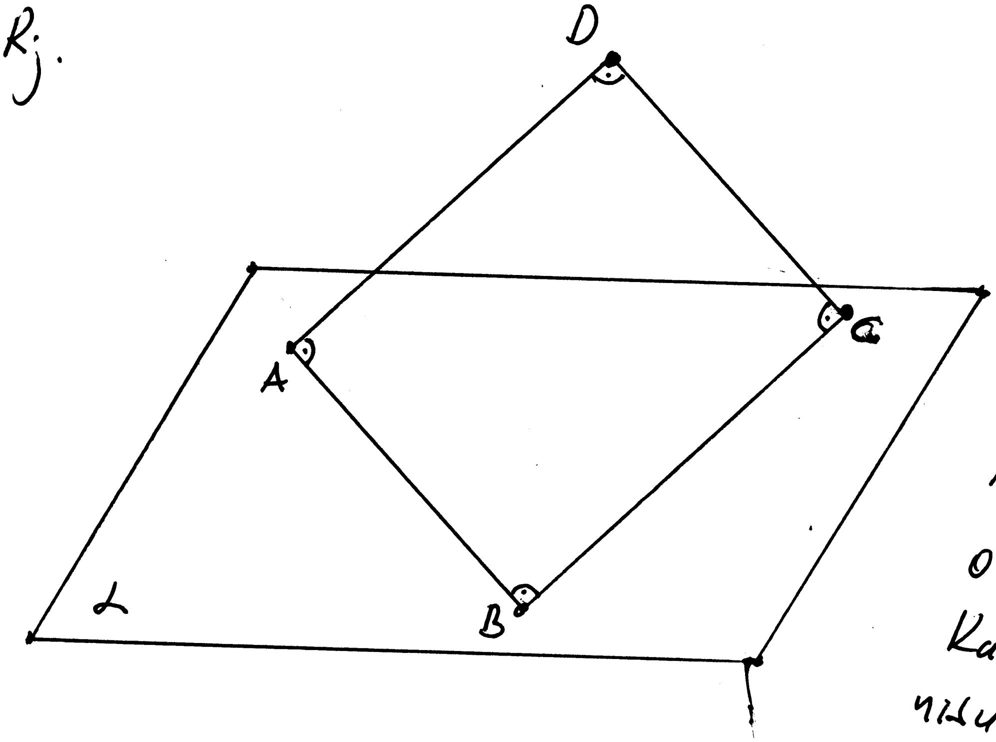
(60%)(c) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

U prostoru su date tačke A, B, C i D. Ako su uglovi $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ i $\measuredangle DAB$ pravi, dokazati da su tačke A, B, C i D koplanarne.

Rj.



Pretpostavimo da date tačke sa datim osobinama nisu komplanarne. Neka je α ravan određena tačkama A, B i C. Kako tačke A, B, C i D nisu komplanarne to $D \notin \alpha$.

Prisjetimo se teoreme:

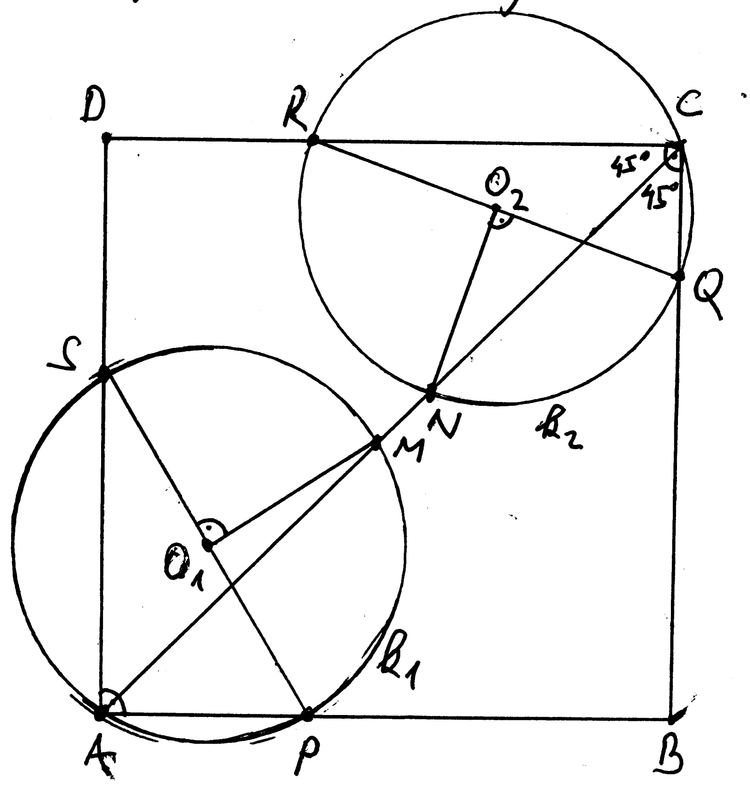
<u>Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i na njih je okomita.</u>

Primjetimo da su prave $p(A,B)$ i $p(D,C)$ mimoilazne. U našem slučaju mimoilazne prave $p(A,B)$ i $p(BC)$ imaju dvije različite zajedničke normale (prave $p(B,C)$ i $p(A,D)$) što je u suprotnosti sa datom teoremom. Prema tome polazna pretpostavka je pogrešna, pa slijedi da su tačke A, B, C i D komplanarne.

Konstruisati kvadrat $\square ABCD$ takav da date tačke P, Q, R, S pripadaju redom stranicama AB, BC, CD i DA.

R: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\square ABCD$ traženi kvadrat i neka tačke P, Q, R, S pripadaju, redom, stranicama AB, BC, CD i AD. Posmatrajmo upr. trouglove $\triangle APS$ i $\triangle QCR$. Ova dva trougla su pravougla i centar njihovog opisanog kruga k_1 i k_2 se nalazi na sredinama duži PS i QR.

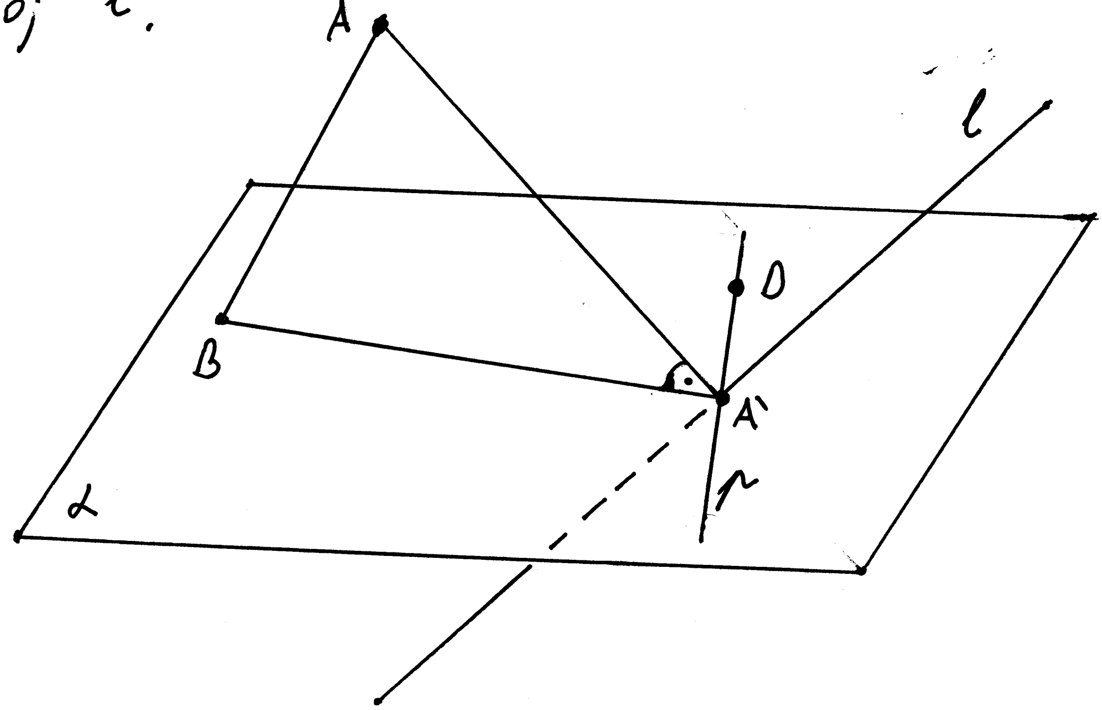


Prisjetimo se sljedeće leme:
Presječna tačka simetrale ivice BC i simetrale unutrašnjeg ugla $\measuredangle BAC$ trougla $\triangle ABC$ pripada opisanom krugu oko tog trougla.

Označimo sa M presječnu tačku simetrale $\measuredangle SAP$ i simetrale duži PS, a sa N simetrale ugla $\measuredangle QCR$ i simetrale duži RQ. Prema navedenoj lemi $M \in k_1$ a $N \in k_2$.
Kako su date tačke P, Q, R i S to krugove k_1 i k_2 možemo konstruisati a time i tačke M i N. Poslije toga nije teško konstruisati tačke A i C a time i kvadrat $\square ABCD$.

U prostoru su date tačke A i B i prava l. Odrediti ravan α takvu da ona sadrži tačku B i da podnožje normale iz tačke A na ravan α pripada pravoj l.

Rj.



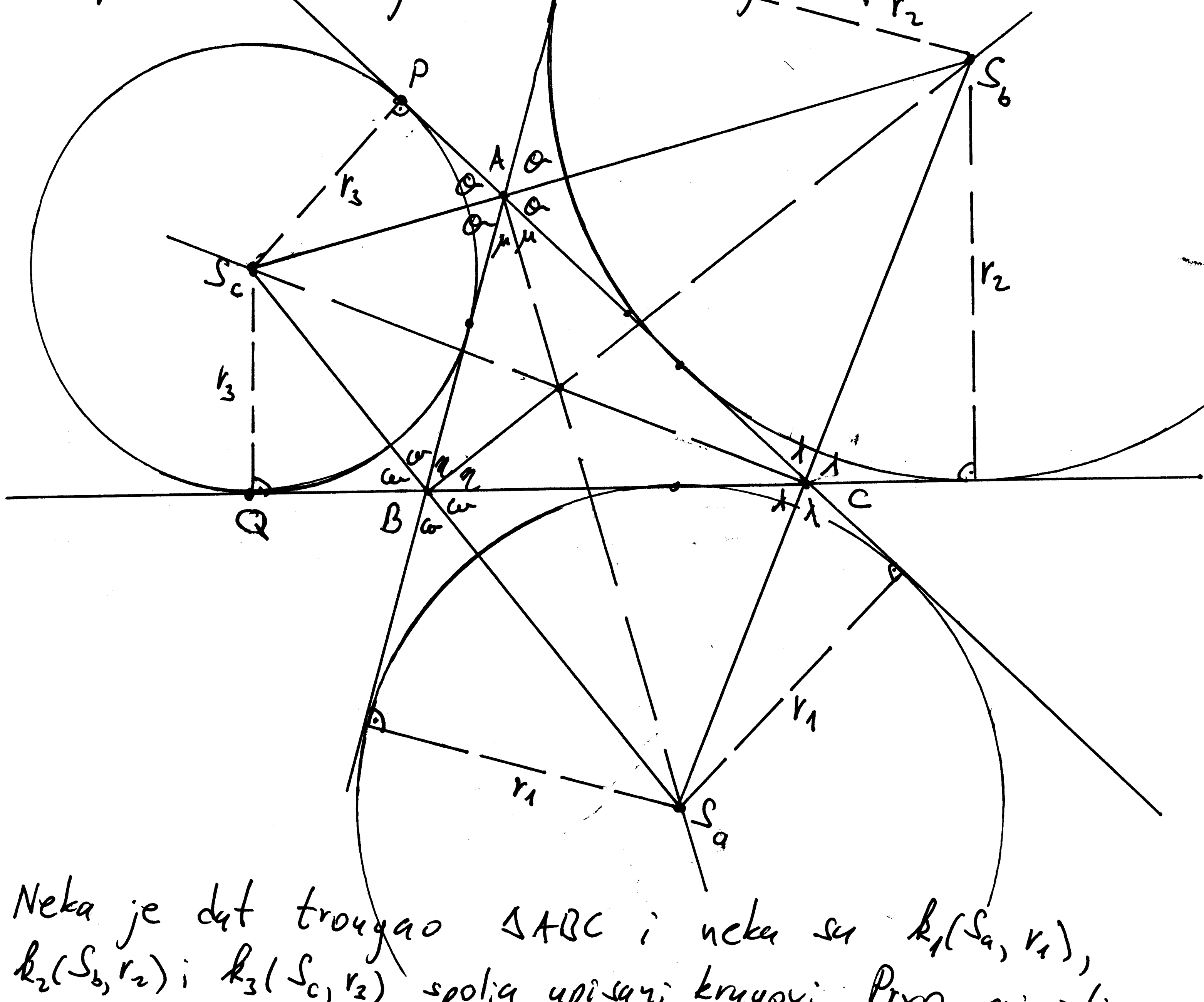
Nacrtajmo sliku tako da ravan α zadovoljava zadate uslove. Neka je A' podnožje normale iz tačke A na ravan α. Tada je $AA' \perp A'B$ pa tačka A' pripada krugu čiji je prečnik duž AB (taj krug je opisan oko $\triangle ABA'$ i centar mu je sredina duži AB), pa primjetimo da tačka A' pripada sferi S čiji je prečnik duž AB. Prema tome tačka A' je presječna tačka sfere S i prave l. Sad kako imamo prave $p(B,A')$ i $p(A,A')$ to možemo konstruisati pravu p t.d. $p \perp p(B,A')$ i $p \perp p(A,A')$. Neka je D proizvoljna tačka na pravoj p. Tražena ravan α je ravan koja sadrži tačke B, A' i D. Dokaz da je $p(A,A') \perp \alpha$ slijedi iz teoreme:

Ako je prava n okomita na dvije prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.

Konstruisati trougao ΔABC takav da su mu tri date nekolinearne tačke S_a, S_b i S_c centri spolja upisanih krugova.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC i neka su $k_1(S_a, r_1)$, $k_2(S_b, r_2)$ i $k_3(S_c, r_2)$ spolja upisani krugovi. Prvo primjetimo da tačke S_a, S_b i S_c pripadaju presjecima simetrala spoljašnjih uglova. Dalje primjetimo da S_a pripada simetrali ugla $\measuredangle BAC$ (ZAŠTO?), da tačka S_b pripada simetrali ugla $\measuredangle CBA$ (ZAŠTO?) i da tačka S_c pripada simetrali ugla $\measuredangle BCA$ (ZAŠTO? $\Leftarrow$ $\Delta CS_cQ \cong \Delta CS_cP$ zbog pod. SSU).

Sad posmatrajmo uglove oko vrha A (vidi sliku)

$$4\theta + 4\mu = 360^\circ \quad /:4$$

$$\theta + \mu = 90^\circ \Rightarrow S_aA \perp S_cS_b$$

$$\Downarrow$$

S_aA je visina $\Delta S_aS_bS_c$.

Posmatrajmo uglove oko vrha B

$$4\omega + 4\eta = 360^\circ \quad /:4$$

$$\omega + \eta = 90^\circ \Rightarrow S_bB \perp S_aS_c$$

$$\Downarrow$$

S_bB je visina $\Delta S_aS_bS_c$.

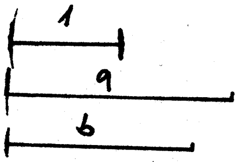
Slično bi pokazali da je S_cC visina $\Delta S_aS_bS_c$.

Kako su date tačke S_a, S_b, S_c to nije teško konstruisati visine $\Delta S_aS_bS_c$ a time dobiti A, B, C i ΔABC.

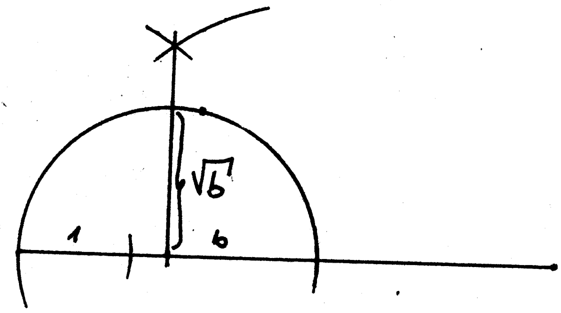
Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

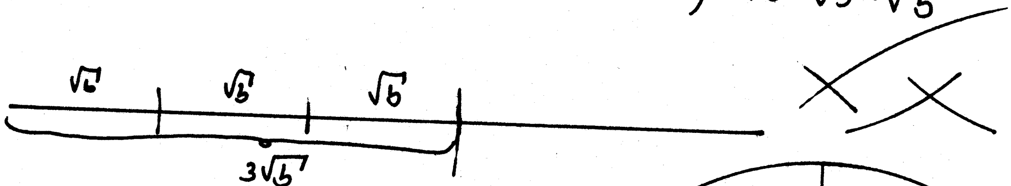
Rj.



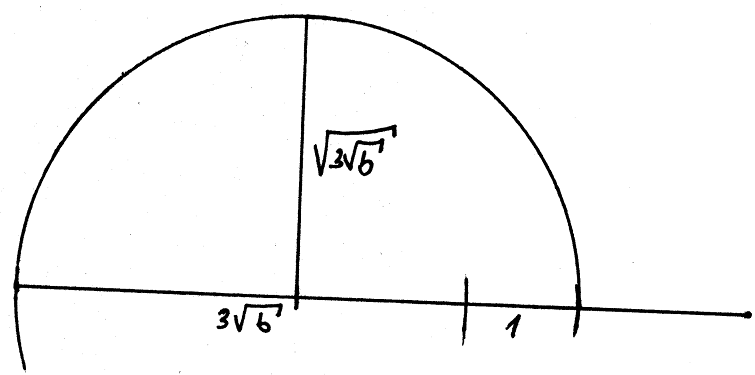
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



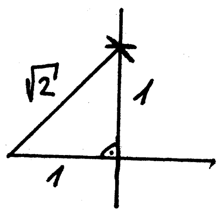
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



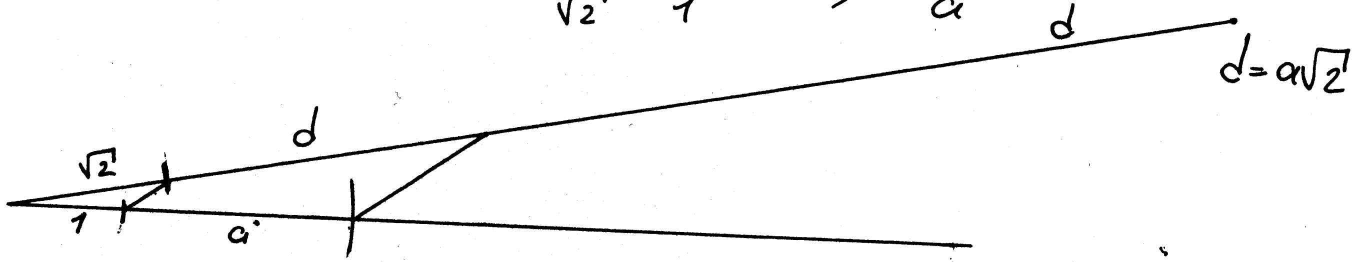
$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

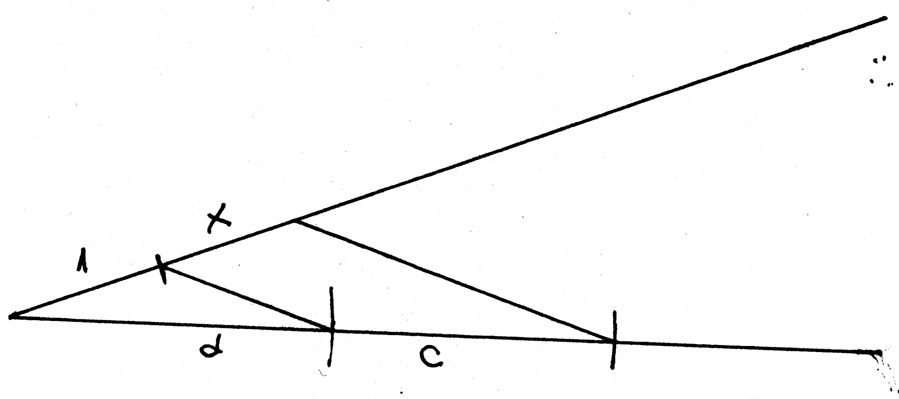
$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

gde je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

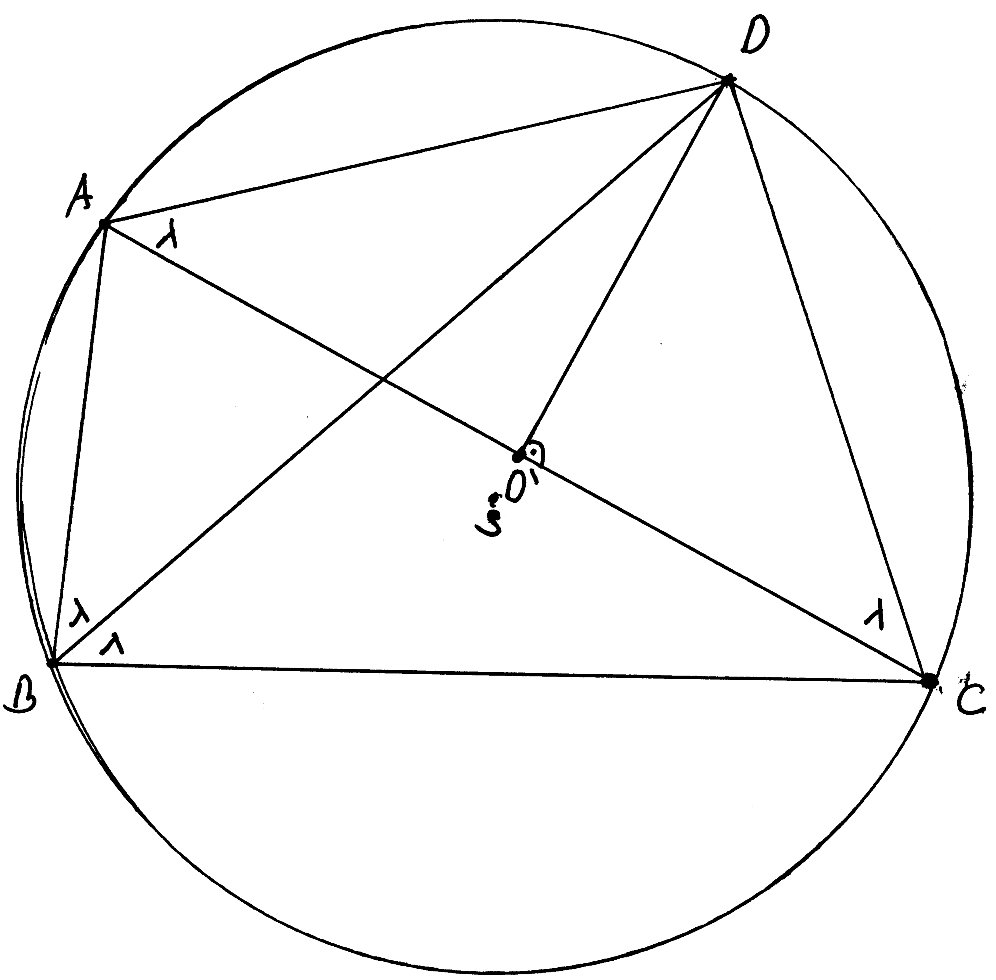
$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$





(#) Dat je trougao $\triangle ABC$. Neka je D presječna tačka simetrale s_b ugla $\measuredangle ABC$ i kruga k opisanog oko $\triangle ABC$. Dokazati da D pripada simetrali stranice AC.

Rj.:



Uvedimo oznake kao na slici

Primjetimo da je $\square ABCD$ tetivni pa

$$\measuredangle DBC \cong \measuredangle DAC = \lambda \quad i \quad \measuredangle ABD \cong \measuredangle ACD = \lambda .$$

Sa DD' označimo visinu $\triangle ACD$. Imamo

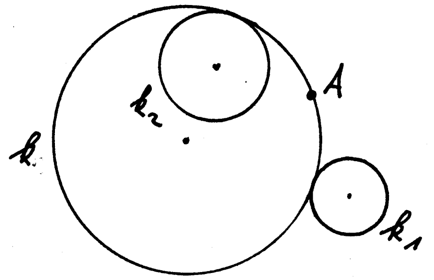
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle DAD' \cong \measuredangle DCD' = \lambda \\ \measuredangle AD'D \cong \measuredangle CD'D = 90^\circ \\ DD' \cong DD' \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle AD'D \cong \triangle CD'D$$

$$\Downarrow$$

$$AD' \cong CD'$$

$\Rightarrow$ D pripada simetrali stranice AC.

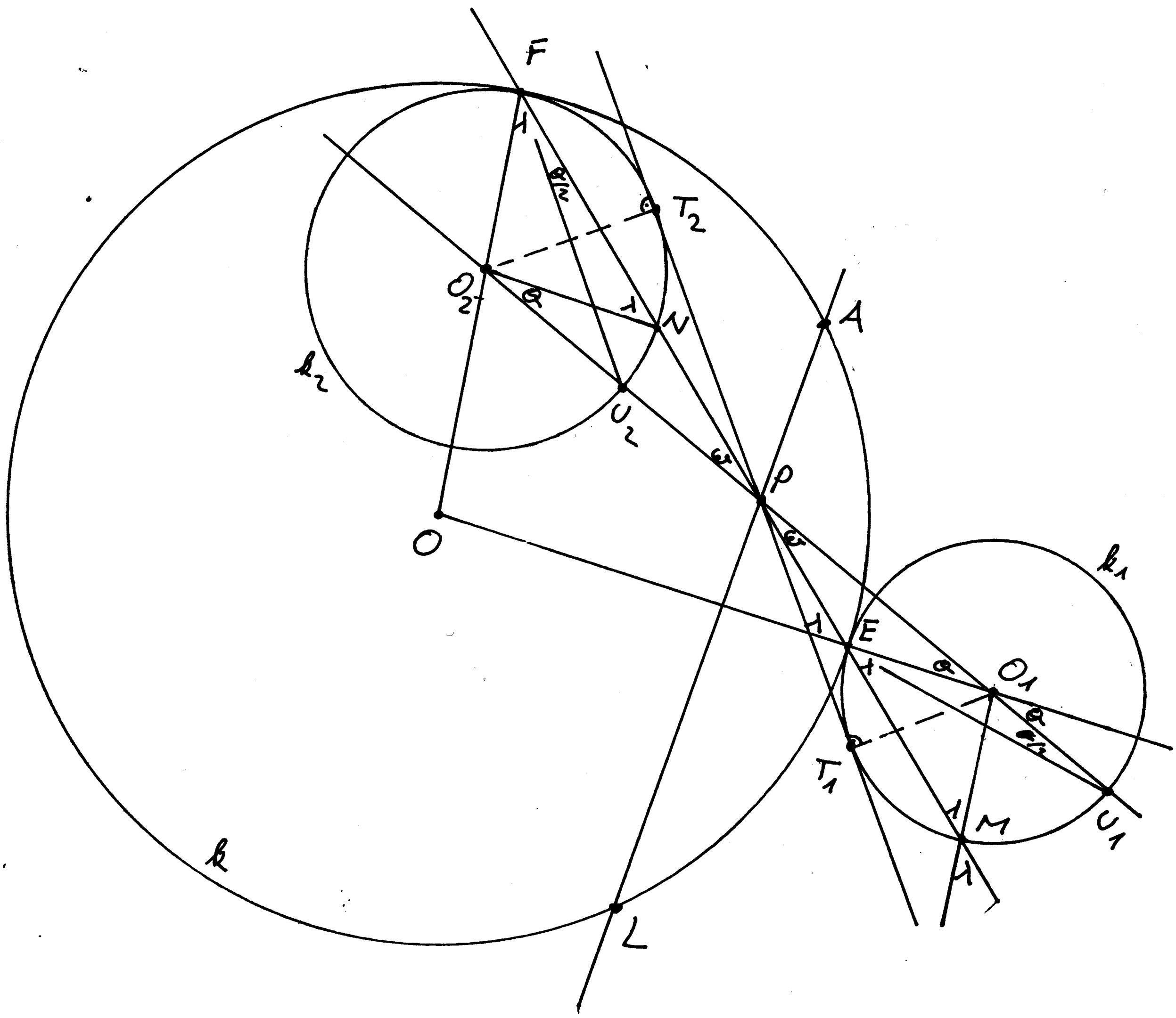
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primjetimo da imamo sljedeća dva poretka $O - E - O_1$ i $O - O_2 - F$.

Neka je $p(E, F) \cap k_2 = \{F, N\}$ i $p(E, F) \cap k_1 = \{E, M\}$: $F - N - E - M$,

$p(O_1,O_2)\cap k_1=\{U_1\}$ i $p(O_1,O_2)\cap k_2=\{U_2\}$: $O_2-U_2-O_1-U_1$,

$\{P\}=p(O_1,O_2)\cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primijetimo da je poredak U_2-P-O_1 i $N-P-E$.

Trouglovi $\triangle O_1EM$, $\triangle OEF$ i $\triangle O_2FN$ su jkk. pa imamo

$$\measuredangle O_1EM\cong\measuredangle O_1ME\cong\measuredangle OEF\cong\measuredangle OFN\cong\measuredangle O_2FN\cong\measuredangle O_2NF=\lambda$$

$\Rightarrow$ $p(O,O_1)\parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M)\parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa θ ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferijski ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferijski ugao $\measuredangle U_2FN=\frac{\theta}{2}$.

Kako je $p(O_2,N)\parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2\cong\measuredangle PO_1E=\theta$ $\Rightarrow$ $\measuredangle O_1U_1E=\frac{\theta}{2}$.

Sad možemo pokazati da su $\triangle FU_2P$ i $\triangle U_1EP$ slični

$$\left.\begin{aligned}\measuredangle U_1PE&\cong\measuredangle FPU_2=\omega\\ \measuredangle PU_1E&\cong\measuredangle PFU_2=\frac{\theta}{2}\\ \measuredangle U_1EP&\cong\measuredangle FU_2P\end{aligned}\right\}\overset{\text{st. UUU}}{\Longrightarrow}\triangle PU_1E\sim\triangle PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2}=\frac{PU_1}{PF}\Rightarrow PE\cdot PF=PU_1\cdot PU_2 \quad \ldots(1)$$

Neka je $p(P,A)\cap k=\{A,L\}$.

Možemo primijetiti $PA\cdot PL=PE\cdot PF$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow$ $PU_1\cdot PU_2=PA\cdot PL$ $\Rightarrow$ $PL=\dfrac{PU_1\cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primijetimo $\triangle PO_1E\sim\triangle PO_2N$ i $\triangle PO_1M\sim\triangle PFO_2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{PO_1}{PO_2}&=\frac{PE}{PN}=\frac{O_1E}{O_2N}=\frac{r_1}{r_2}\\ \frac{PO_1}{PO_2}&=\frac{PM}{PL}=\frac{O_1M}{O_2F}=\frac{r_1}{r_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1. Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.